PROSIDING
Seminar Nasional Matematika dan Sains
Departemen Pendidikan Matematika dan Pendidikan Biologi
FKIP Universitas Wiralodra
11 Desember 2021

PERBANDINGAN METODE EKSPLISIT DAN IMPLISIT PADA METODE BEDA HINGGA UNTUK PENENTUAN HARGA OPSI

Chatarina Enny Murwaningtyas
Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta

Email: enny@usd.ac.id

Abstrak. Opsi merupakan salah satu produk derivatif yang diperdagangkan di pasar modal. Harga opsi dapat ditentukan dengan formula Black-Scholes. Selain menggunakan formula Black Scholes, harga opsi dapat ditentukan dengan menggunakan metode numeris. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan harga opsi dengan menggunakan metode beda hingga, khususnya metode eksplisit dan metode implisit. Algoritma penentuan harga opsi dengan metode eksplisit dan metode implisit dihasilkan dalam makalah ini. Dengan menggunakan algoritma ini akan dibandingkan kedua metode dan juga akan dibandingkan harga opsi yang dihasilkan dengan metode beda hingga apakah mendekati harga opsi yang dihasilkan dengan fomula Black-Scholes.

Kata Kunci : *Opsi Saham, Metode Beda Hingga, Metode Eksplisit, Metode Implisit.*

1. Pendahuluan

Keberhasilan seorang pedagang ditunjukkan dari kemampuannya membeli dengan harga rendah dan menjualnya dengan harga tinggi. Hal ini juga berlaku bagi yang tidak berminat melakukan spekulasi berdasarkan kecenderungan pasar. Setiap orang tidak dapat mengetahui apa yang akan terjadi di masa mendatang, sementara mereka juga ingin tetap berhasil dalam kegiatan pasar, maka dewasa ini banyak orang yang mengalihkan perhatiannya kepada produk sekuritas derivatif.

Sekuritas derivatif adalah sekuritas yang nilainya tergantung pada nilai aset dasarnya. Beberapa jenis derivatif adalah opsi (*option*), waran (*warant*) dan kontrak berjangka (*forwards, future*). Salah satu contoh opsi adalah opsi untuk saham.

Harga opsi saham diambil atau ditentukan dari harga saham yang menjadi acuan. Opsi adalah suatu kontrak antara dua pihak yang salah satu pihak (pembeli) memiliki hak, bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual suatu sekuritas dari pihak lain (penjual), pada harga yang telah ditentukan dan dalam periode yang juga telah ditentukan. Keputusan untuk menjalankan hak yang dimiliki, sepenuhnya ditentukan oleh pemegang opsi. Jika opsi tersebut menguntungkan, maka opsi tersebut dapat dijalankan. Sebaliknya, jika opsi tersebut tidak menguntungkan, maka opsi tersebut boleh tidak dijalankan.

Opsi dapat dibedakan berdasarkan jenis hak yang diberikan, yaitu opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Opsi beli adalah hak untuk membeli suatu sekuritas, sedangkan opsi jual adalah hak untuk menjual suatu sekuritas. Opsi juga dibedakan atas waktu penggunaanya. Ada dua tipe opsi menurut waktu penggunaanya, yaitu opsi tipe Amerika dan opsi tipe Eropa. Opsi tipe Amerika merupakan opsi yang dapat dilaksanakan kapan saja antara tanggal pembelian sampai masa jatuh temponya (sampai usia opsi tersebut berakhir). Sedangkan opsi tipe Eropa merupakan opsi yang hanya dapat dilaksanakan pada masa jatuh tempo opsi tersebut.

Model untuk menentukan harga opsi beli maupun opsi jual tipe Eropa yang digunakan oleh sebagian besar praktisi di pasar adalah model yang ditemukan oleh Black dan Scholes [1]. Model Black-Scholes merupakan model dengan waktu kontinu yang mengasumsikan return harga saham mengikuti distribusi lognormal. Asumsi model ini adalah saham tidak memberikan pembayaran dividen, tidak ada biaya transaksi, suku bunga bebas risiko konstan, serta perubahan harga saham mengikuti pola acak. Harga opsi pada waktu nol dapat ditentukan dengan formula Black-Scholes [2]. Formula itu menggunakan harga saham pada waktu kontrak, harga kontrak, volatilitas saham, bunga bebas risiko, dan jangka waktu kontrak opsi.

Dilain pihak penentuan harga opsi dapat ditentukan dengan metode numeris. Salah satu metode numeris yang bisa menyelesaikan persamaan diferensial parsial Black-Scholes adalah metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang deterministik. Sedangkan model harga saham menggunakan model gerak Brown yang merupakan model stokastik. Peper ini bertujuan untuk membandingkan harga opsi yang dihasilkan dengan metode beda hingga apakah akan mendekati harga opsi yang dihasilkan dengan fomula Black-Scholes yang salah satunya ditentukan dengan konsep nilai harapan dalam ruang probabilitas tertentu. Selain itu akan dilihat karakteristik penentuan harga opsi dengan metode eksplisit dan metode implisit.

2. Model Black-Scholes

Pada model Black Scholes [1] terdiri dari dua kemungkinkan investasi yaitu

a. Investasi simpanan di rekening bank yang dimodelkan

$$dA_t = rA_t dt, \tag{2.1}$$

dengan r merupakan tingkat suku bunga bank dan $A_0 = 1, t \in [0, T]$.

b. Investasi pembelian saham yang dimodelkan

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\hat{B}_t, \tag{2.2}$$

dengan $\hat{B}_t$ merupakan gerak Brown di bawah ukuran probabilitas $\widehat{\mathbb{P}}$, μ merupakan ekspektasi *return* saham, σ^2 merupakan volatilitas *return* saham, dan $S_0 > 0,\ t \in [0, T]$. Harga saham S_t merupakan pemetaan dari ruang ukuran probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ke $\mathbb{R}$.

Berdasarkan formula Ito [3] diperoleh penyelesaian dari Persamaan (2.2) adalah

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma \hat{B}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \tag{2.3}$$

Misalkan $\hat{B}_t = B_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt$ maka diperoleh

$$S_t = S_0 \exp\left(rt + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) merupakan model harga saham di bawah ukuran resiko netral.

Keadaan dunia nyata sangatlah kompleks dan keadaan dunia nyata tidak cukup disederhanakan dengan model rekening bank pada Persamaan (2.1) dan model saham pada Persamaan (2.3). Oleh karena itu, model tersebut dapat digunakan bila sebelumnya terdapat berbagai penyederhanaan. Berbagai penyederhanaan tersebut ditunjukkan dalam asumsi-asumsi yang dipergunakan untuk menyusun model tersebut. Asumsi-asumsi yang dipergunakan di sini adalah :

a) Tingkat suku bunga bank r konstan.
b) Koefisien volatility return saham σ dan ekspektasi return saham μ konstan.
c) Investasi sepenuhnya bisa dipecah-pecah (*fully divisible*).
d) Tidak adanya biaya transaksi dalam membeli atau menjual sekuritas.
e) Tidak ada pajak penghasilan bagi para pemodal.
f) Investor tidak bisa mempengaruhi harga saham dengan tindakan membeli atau menjual saham.

g) Tidak adanya pembayaran dividen selama kontrak opsi berlangsung sampai waktu jatuh tempo.
h) Pemerintah dan gejolak politik tidak bisa mempengaruhi harga saham.

Model Black Scholes merupakan model portofolio dari rekening bank dan saham. Portofolio adalah kombinasi kepemilikan sebagai investasi, dengan maksud untuk melakukan diversifikasi risiko. Dengan kata lain tujuan portofolio adalah mengurangi risiko.

Opsi tipe Eropa, yang dapat dilaksanakan pada waktu T dan mempunyai fungsi pay off f_T, merupakan kontrak antara dua pihak yaitu penjual dan pembeli. Jika kontrak ini berjalan maka dari kontrak ini, pembeli opsi mendapatkan keuntungan sebesar f_T pada waktu T. Misalkan E merupakan harga kontrak yang ditetapkan dan kontrak yang terjadi adalah opsi beli standar tipe Eropa. Jika pada waktu T harga saham tersebut di pasar sebesar S_T dan $S_T \geq E$ maka situasi ini adalah situasi yang menguntungkan, yang berarti pemilik opsi akan membeli saham tersebut dari pemilik saham dengan harga E dan menjualnya dengan harga S_T. Jadi ia mendapatkan keuntungan sebesar $S_T - E$. Dan sebaliknya jika $S_T \leq E$, maka pemilik opsi tidak akan membeli saham tersebut pada penjual opsi karena harga di pasar lebih murah dan ia mengalami kerugian sebesar harga opsi C. Fungsi keuntungan ini selanjutnya dituliskan sebagai

$$f_T = (S_T - E)^+ = \max\{S_T - E, 0\}. \tag{2.5}$$

dan untuk seterusnya fungsi keuntungan disebut sebagai fungsi Pay off.

Dengan cara yang sama jika dimisalkan E merupakan harga kontrak dan kontrak yang terjadi adalah opsi jual standar tipe Eropa, maka fungsi pay off adalah

$$f_T = (E - S_T)^+ = \max\{E - S_T, 0\}. \tag{2.6}$$

Model harga saham yang digunakan adalah model harga saham pada Persamaan (2.4). Harga opsi beli tipe Eropa dapat ditentukan dengan teorema berikut.

Teorema 2.1.[2] Jika harga saham dimodelkan dengan gerak Brown, maka harga opsi beli tipe Eropa pada saat $t \in [0, T]$ dengan harga kontrak E dan waktu jatuh tempo T ditentukan sebagai berikut

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{2.7}$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{2.8}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{2.9}$$

dan $N(\cdot)$ merupakan probabilitas kumulatif dari distribusi normal.

Teorema sebelumnya telah membahas tentang harga opsi beli tipe Eropa jika saham dimodelkan dengan gerak Brown. Selanjutnya dalam teorema berikut akan ditentukan harga opsi jual tipe Eropa jika saham dimodelkan dengan gerak Brown.

Teorema 2.2.[4] Jika harga saham dimodelkan dengan gerak Brown, maka harga opsi jual tipe Eropa pada saat $t \in [0, T]$ dengan harga kontrak E dan waktu jatuh tempo T ditentukan sebagai berikut

$$P(t, S_t) = Ee^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \tag{2.10}$$

dengan d_1 dan d_2 didefinisikan pada Persamaan (2.8) dan (2.9) serta $N(\cdot)$ merupakan probabilitas kumulatif distribusi normal.

3. Metode Beda Hingga

Pada makalah ini, penentuan harga opsi akan diselesaikan dengan menggunakan metode numeris. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi secara numeris adalah metode beda hingga. Sebelum membahas metode beda hingga, terlebih dahulu akan dibahas persamaan diferensial Black-Scholes di bawah model gerak Brown dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.1.[5] Misalkan $V(t,S)$ merupakan harga opsi yang bergantung pada waktu t dan harga saham S pada waktu t. Jika harga saham dimodelkan dengan gerak Brown pada Persamaan (2.4) maka $V(t,S)$ memenuhi persamaan berikut

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV=0. \tag{3.1}$$

Pada bagian ini akan ditentukan algoritma penentuan harga opsi di bawah model gerak Brown dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan metode numeris yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial yang digunakan untuk menentukan harga opsi di bawah model gerak Brown adalah Persamaan (3.1). Persamaan diferensial parsial yang digunakan untuk penentuan harga opsi merupakan persamaan diferensial parsial yang menggunakan kondisi waktu akhir. Karena metode beda hingga biasanya menggunakan kondisi awal, maka akan dirubah variabel t dalam Persamaan (3.1) dengan transformasi $\tau = T - t$ seperti berikut

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}-rS\frac{\partial V}{\partial S}-\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rV=0. \tag{3.2}$$

Metode beda hingga merupakan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan mengaproksimasi turunan-turunannya. Pada metode beda hingga ini perlu didefinisikan wilayah variabel bebas dalam persamaan diferensial parsial dengan grid terbatas untuk mendekati variabel terikat. Dalam kasus ini akan disusun grid diskrit yang berdasarkan harga saham (S) dan waktu kontrak opsi (t). Misalkan S_{maks} merupakan harga saham yang besar. Pada metode ini dibutuhkan S_{maks} karena domain untuk persamaan diferensial parsial haruslah terbatas sedangkan harga saham di sini tidak terbatas. Pembatasan ini diperlukan untuk tujuan teknis komputasi. Grid terdiri dari titik-titik (τ_k, S_j) sedemikian hingga $S_j = j\Delta S$ dan $\tau_k = k\Delta\tau$ dengan $j = 0,1,\dots,M$ dan $k = 0,1,\dots,N$.

Gagasan yang mendasari metode beda hingga adalah menggantikan turunan parsial dengan ekspansi deret Taylor. Persamaan-persamaan di bawah ini merupakan ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam penentuan skema beda hingga untuk menentukan harga opsi,

$$\frac{V_j^{k+1}-V_j^k}{\Delta\tau}=\frac{\partial V}{\partial \tau}+\mathcal{O}(\Delta\tau), \tag{3.3}$$

$$\frac{V_j^{k}-V_j^{k-1}}{\Delta\tau}=\frac{\partial V}{\partial \tau}+\mathcal{O}(\Delta\tau), \tag{3.4}$$

$$\frac{V_{j+1}^{k}-V_{j-1}^{k}}{2\Delta S}=\frac{\partial V}{\partial S}+\mathcal{O}((\Delta S)^2), \tag{3.5}$$

dan

$$\frac{V_{j+1}^k - 2V_j^k + V_{j-1}^k}{(\Delta S)^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mathcal{O}((\Delta S)^2). \tag{3.6}$$

Persamaan (3.3) merupakan persamaan yang digunakan untuk aproksimasi turunan pertama dari V terhadap t untuk skema beda maju sedangkan Persamaan (3.4) digunakan untuk skema beda mundur. Aproksimasi turunan pertama dan kedua dari V terhadap S menggunakan Persamaan (3.5) dan (3.6) untuk semua skema yang dibahas dalam makalah ini. Skema beda hingga yang akan dibahas di dalam penelitian ini adalah skema eksplisit dan skema implisit.

Metode eksplisit adalah metode yang menghitung status sistem di lain waktu dari status sistem saat ini. Sebagai contoh harga opsi V_j^{k+1} ditentukan oleh harga opsi V_{j-1}^k , V_j^k, dan V_{j+1}^k.

Jika Persamaan(3.3), (3.5), dan (3.6) disubstitusikan ke Persamaan(3.2) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{V_j^{k+1} - V_j^k}{\Delta\tau} - rj\Delta S \frac{V_{j+1}^k - V_{j-1}^k}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 (j\Delta S)^2 \frac{V_{j+1}^k - 2V_j^k + V_{j-1}^k}{(\Delta S)^2} \\ + rV_j^k = 0\end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan galat pemotongan lokal sebesar $\mathcal{O}(\Delta\tau + (\Delta S)^2)$. Persamaan (3.7) dapat dituliskan seperti berikut

$$\begin{aligned}V_j^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau V_{j-1}^k + (1 - (\sigma^2 j^2 + r)\Delta\tau)V_j^k \\ + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau V_{j+1}^k\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dengan kata lain Persamaan (3.8) dapat dituliskan dalam skema beda hingga eksplisit berikut

$$V_j^{k+1} = a_j^E V_{j-1}^k + b_j^E V_j^k + c_j^E \Delta\tau V_{j+1}^k, \tag{3.9}$$

dengan

$$a_j^E = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau, \tag{3.10}$$

$$b_j^E = (1 - (\sigma^2 j^2 + r)\Delta\tau), \tag{3.11}$$

$$c_j^E = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau. \tag{3.12}$$

Dilain pihak untuk penentuan harga opsi dengan menggunakan metode implisit perlu disubstitusikan Persamaan (3.4), (3.5)dan (3.6) ke Persamaan (3.2) maka diperoleh

$$\begin{aligned}V_j^{k-1} = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau V_{j-1}^k + (1 + (\sigma^2 j^2 + r)\Delta\tau)V_j^k \\ + \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau V_{j+1}^k.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Atau dengan kata lain Persamaan (3.13) dapat dituliskan dalam skema beda hingga implisit berikut

$$V_j^{k-1} = a_j^I V_{j-1}^k + b_j^I V_j^k + c_j^I \Delta\tau V_{j+1}^k, \tag{3.14}$$

dengan

$$a_j^I = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 + \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau, \tag{3.15}$$

$$b_j^I = (1 + (\sigma^2 j^2 + r)\Delta\tau), \tag{3.16}$$

$$c_j^I = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 - \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau. \tag{3.17}$$

Pada metode ini terdiri dari tiga nilai yang tidak diketahui dan hanya memiliki satu nilai yang diketahui. Untuk mempermudah perhitungan maka Persamaan (3.13) akan dituliskan dalam bentuk matrik seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} V_1^{k-1} \\ V_2^{k-1} \\ \vdots \\ V_{M-2}^{k-1} \\ V_{M-1}^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^I & c_1^I & 0 & 0 & 0 \\ a_2^I & b_2^I & c_2^I & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{M-2}^I & b_{M-2}^I & c_{M-2}^I \\ 0 & 0 & 0 & a_{M-1}^I & b_{M-1}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ V_{M-2}^k \\ V_{M-1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1^I V_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1}^I V_M^k \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Atau Persamaan (3.18) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} b_1^I & c_1^I & 0 & 0 & 0 \\ a_2^I & b_2^I & c_2^I & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{M-2}^I & b_{M-2}^I & c_{M-2}^I \\ 0 & 0 & 0 & a_{M-1}^I & b_{M-1}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ V_{M-2}^k \\ V_{M-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{k-1} \\ V_2^{k-1} \\ \vdots \\ V_{M-2}^{k-1} \\ V_{M-1}^{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^I V_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1}^I V_M^k \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Misalkan

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} b_1^I & c_1^I & 0 & 0 & 0 \\ a_2^I & b_2^I & c_2^I & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{M-2}^I & b_{M-2}^I & c_{M-2}^I \\ 0 & 0 & 0 & a_{M-1}^I & b_{M-1}^I \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{V}^k = [V_1^k \quad V_2^k \quad \dots \quad V_{M-2}^k \quad V_{M-1}^k]^T \tag{3.21}$$

dan

$$\boldsymbol{F} = [a_1^I V_0^k \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad c_{M-1}^I V_M^k]^T \tag{3.22}$$

maka Persamaan (3.19) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^k = \boldsymbol{V}^{k-1} - \boldsymbol{F} \tag{3.23}$$

Dan menggunakan invers matrik $\boldsymbol{D}$ maka dapat diperoleh matriks $\boldsymbol{V}^k$ yang dapat digunakan untuk mencari aproksimasi solusi dari persamaan diferensial parsial, yaitu sebagai berikut

$$\boldsymbol{V}^k = \boldsymbol{D}^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{V}^{k-1} - \boldsymbol{F}) \tag{3.24}$$

4. Penentuan Harga Opsi

Pada Bab 2 telah dibahas penentuan harga opsi Eropa secara analitik. Harga opsi beli tipe Eropa di bawah model gerak Brown dapat ditentukan dengan formula dalam Teorema 2.1 dan harga opsi jual tipe Eropa dapat ditentukan dengan formula dalam Teorema 2.2. Bagian ini akan dibahas penentuan harga opsi tipe Eropa dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga yang akan digunakan adalah metode eksplisit dan metode implisit yang berturut-turut telah dibahas dalam bab sebelumnya.

Opsi beli tipe Eropa adalah opsi yang dapat dijalankan pada waktu jatuh tempo dengan fungsi *pay off* seperti pada Persamaan (2.5). Misalkan diterbitkan kontrak opsi dengan harga kontrak E, waktu jatuh tempo T untuk saham dengan harga saham pada waktu $t = 0$ sebesar S_0. Persamaan (2.5) dapat dituliskan dalam notasi grid untuk syarat awal sebagai berikut

$$V_j^0 = \max\{j\Delta S - E, 0\} \tag{4.1}$$

dan syarat batas sebagai berikut :

$$V_0^k = 0 \tag{4.2}$$

$$V_M^k = M\Delta S - Ee^{-rk\Delta\tau} \tag{4.3}$$

dengan $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$.

Opsi jual tipe Eropa adalah hak untuk menjual saham pada waktu T dengan harga sebesar kontrak yang disepakati E bila harga saham pada waktu T tidak lebih besar dari harga kontrak. Atau dengan kata lain pemegang kontrak opsi ini medapat keuntungan maksimal sebesar $E - S_T$. Fungsi *pay off* untuk opsi jual tipe Eropa dinyatakan dalam Persamaan (2.6). Persamaan (2.6) dapat dituliskan ulang dengan notasi grid, yaitu syarat awal dalam model ini sebagai berikut

$$V_j^0 = \max\{E - j\Delta S, 0\} \tag{4.4}$$

dan syarat batas sebagai berikut :

$$V_0^k = Ee^{-rk\Delta\tau} \tag{4.5}$$

$$V_M^k = 0 \tag{4.6}$$

dengan $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$.

input : Harga kontrak opsi (E), waktu jatuh tempo (T), harga saham pada waktu nol (S_0), tingkat suku bunga bank (r), volatilitas harga saham (σ), S_{max}, ΔS, dan Δt

output: Harga Opsi Beli dengan Metode Eksplisit

$M \longleftarrow$ bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi $S_{max}/\Delta S$.

$N \longleftarrow$ bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi $T/\Delta t$.

$V_j^0 \longleftarrow \max\{j\Delta S - E, 0\}$.

$V_0^k \longleftarrow 0$.

$V_M^k \longleftarrow M\Delta S - Ee^{-rk\Delta\tau}$.

for $j \leftarrow N$ **to** 1 **do**

  $a_j \longleftarrow \left(\frac{1}{2}(\sigma j)^2 - \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau$.

  $b_j \longleftarrow 1 - \left((\sigma j)^2 + r\right)\Delta\tau$.

  $c_j \longleftarrow \left(\frac{1}{2}(\sigma j)^2 + \frac{1}{2}rj,\right)\Delta\tau$.

  for $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

    $V_j^{k+1} \longleftarrow a_j V_{j-1}^k + b_j V_j^k + c_j V_{j+1}^k$.

  end

end

Menggunakan interpolasi linear dapat ditentukan harga opsi.

Gambar 1. Algoritma Metode Implisit untuk Penentuan Harga Opsi Beli Tipe Eropa

Algoritma 1 pada Gambar 1 merupakan algoritma untuk penentuan harga opsi beli dengan metode eksplisit yang menggunakan Persamaan (3.9), (3.10), (3.11) dan (3.12), serta persamaan syarat awal dan syarat batas untuk penentuan opsi beli tipe Eropa pada

Persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3). Penentuan harga opsi beli tipe Eropa menggunakan metode beda hingga implisit pada Persamaan (3.24), (3.20), (3.21), (3.22), (3.15), (3.16) dan (3.17), serta persamaan syarat awal dan syarat batas untuk opsi beli tipe Eropa pada Persamaan (4.4), (4.5) dan (4.6) dapat dinyatakan dalam Algoritma 2 pada Gambar 2. Opsi jual tipe Eropa dapat ditentukan dengan metode eksplisit dan metode implisit, jika baris 3, 4, dan 5 pada Algoritma 1 dan 2 diganti menggunakan Persamaan (4.4), (4.5) dan (4.6).

input : Harga kontrak opsi (E), waktu jatuh tempo (T), harga saham pada waktu nol (S_0), tingkat suku bunga bank (r), volatilitas harga saham (σ), S_{max}, ΔS, dan Δt.

output: Harga Opsi Beli dengan Metode Implisit

1 $M \longleftarrow$ bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi $S_{max}/\Delta S$.

2 $N \longleftarrow$ bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi $T/\Delta t$.

3 $V_j^0 \longleftarrow \max\{j\Delta S - E, 0\}$.

4 $V_0^k \longleftarrow 0$.

5 $V_M^k \longleftarrow M\Delta S - Ee^{-rk\Delta\tau}$.

6 **for** $j \leftarrow N$ **to** 1 **do**

7     $a_j \longleftarrow \left(-\frac{1}{2}(\sigma j)^2 + \frac{1}{2}rj\right)\Delta\tau$.

8     $b_j \longleftarrow 1 + \left((\sigma j)^2 + r\right)\Delta\tau$.

9     $c_j \longleftarrow \left(-\frac{1}{2}(\sigma j)^2 - \frac{1}{2}rj,\right)\Delta\tau$.

10   **for** $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

11   Menentukan matrik **D** berdasarkan Persamaan 3.20.

12   Mencari invers matrik **D**.

13   Menentukan matrik **V** berdasarkan Persamaan 3.21.

14   Menentukan matrik **F** berdasarkan Persamaan3.22.

15         $\mathbf{V}^k \longleftarrow \mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{V}^{k-1} - \mathbf{F}\right)$.

16   **end**

17 **end**

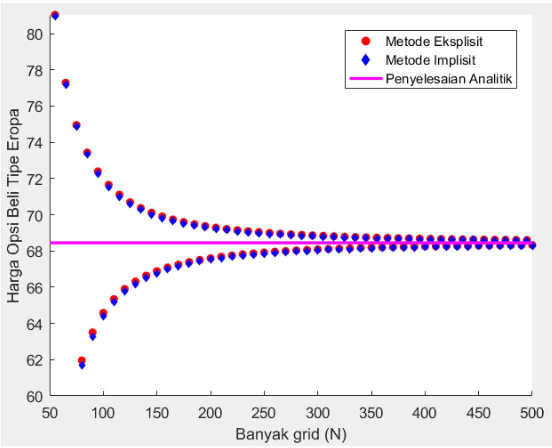
18 Menggunakan interpolasi linear dapat ditentukan harga opsi.

Gambar 2. Algoritma Metode Implisit untuk Penentuan Harga Opsi Beli Tipe Eropa

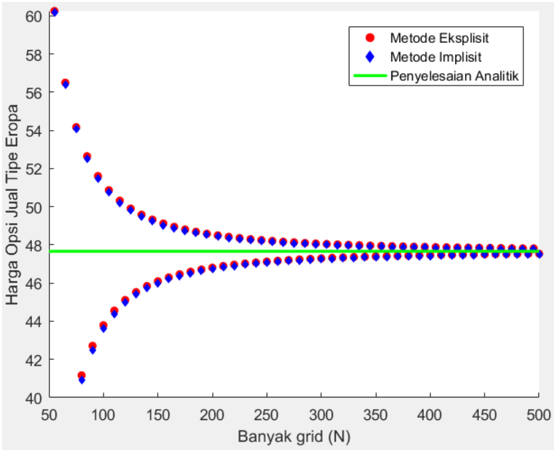
Table 1. Perbandingan Metode Eksplisit dan Metode Implisit pada Penentuan Harga Opsi

N	M	Harga Opsi Beli dengan Metode		Harga Opsi Jual dengan Metode	
		Eksplisit	Implisit	Eksplisit	Implisit
2^6	2^6	57,9852	57,7168	37,1945	36,9275
2^7	2^7	66,2404	66,1114	45,4500	45,3217
2^8	2^8	67,9425	67,8858	47,1523	47,0960
2^9	2^9	68,3337	68,3060	47,5436	47,5161
2^{10}	2^{10}	68,4268	68,4130	47,6367	47,6230
2^{11}	2^{11}	NaN	68,4414	47,6582	47,6514
2^{12}	2^{12}	NaN	68,4493	NaN	47,6593

Selanjutnya akan dilihat efektifitas kedua metode beda hingga ini pada penentuan harga opsi pada opsi beli dan opsi jual tipe Eropa. Misalkan terdapat kontrak opsi beli dan opsi jual dengan besarnya kontrak $E = 5000$, waktu jatuh tempo $T = 0{,}25$, harga saham pada waktu nol $S_0 = 5000$, volatilitas harga saham $\sigma = 0{,}1$, dan tingkat suku bunga bank $r = 0{,}05$. Harga opsi beli pada kasus ini menggunakan penyelesaian analitik pada Persamaan (2.7) adalah 68,4531 dan harga opsi jual menggunakan penyelesaian analitik pada Persamaan (2.10) adalah 47,6631. Sedangkan jika dipilih $N = M = 2^6, 2^7, \ldots, 2^{12}$ harga opsi beli dan opsi jual ini akan menghasilkan nilai seperti pada Tabel 3.1. Dari hasil ini terlihat kedua metode ini menghasilkan harga opsi yang cukup dekat namun pada metode eksplisit akan bernilai bias jika dipilih N dan M-nya besar. Sedangkan dilain pihak metode eksplisit membutuhkan waktu yang sangat singkat dibandingkan metode implisit.



Gambar 3. Perbandingan Metode Eksplisit dan Implisit pada Penentuan Harga Opsi Beli



Gambar 4. Perbandingan Metode Eksplisit dan Implisit pada Penentuan Harga Opsi Jual

Gambar 3 adalah gambar yang membandingkan harga opsi beli yang dihasilkan dengan metode eksplisit, metode implisit dan harga opsi beli yang dihasilkan dengan formula pada Persamaan (2.7). Banyak grid N dan M yang digunakan berturut-turut adalah 50, 55, 60, 65, ..., 500. Dari Gambar 3 terlihat bahwa harga opsi beli tipe Eropa yang dihasilkan dengan metode eksplisit dan metode implisit saling berdekatan untuk setiap N yang dipilih. Nilai opsi yang dihasilkan dengan kedua metode ini pun akan mendekati nilai analitiknya jika dipilih N yang besar. Namun dilain pihak berdasarkan Tabel 1, harga opsi beli dengan metode eksplisit akan bias saat $N = 2^{11}$. Jadi dapat disimpulkan metode implisit konvergen ke nilai analitiknya sedangkan pada metode eksplisit harga opsinya akan menjauhi nilai analitiknya untuk N dan M yang sangat besar.

Sama halnya dengan opsi beli tipe Eropa, harga opsi jual tipe Eropa yang diperoleh dengan metode eksplisit akan bias jika N dan M-nya besar. Namun nilai yang dihasilkan metode eksplisit dan implisit saling mendekati jika menggunakan N dan M yang kecil. Gambar 4 menyatakan juga harga opsi yang dihasilkan dengan metode eksplisit dan implisit konvergen ke nilai analitiknya. Namun bila dilihat hasil dari Tabel 1 dapat disimpulkan metode eksplisit tidak konvergen karena saat N dan M sangat besar harga opsinya akan menjauhi nilai analitiknya. Dilain pihak metode inplisit adalah metode beda hingga yang stabil dan konvergen hal ini ditunjukkan dalam contoh yang dibahas pada bagian ini. Hasil penelitian ini senada dengan yang dihasilkan oleh Murwaningtyas dkk [6], jika model harga saham yang dibahas dalam makalah itu dipilih $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$.

5. Kesimpulan

Hasil penelitian ini adalah algoritma penentuan harga opsi di bawah model gerak Brown dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga yang dibahas dalam makalah ini adalah metode eksplisit dan metode implisit. Kedua metode ini menghasilkan nilai yang cukup mendekati satu sama lain jika $\Delta\tau$ dan ΔS tidak sangat kecil. Namun dalam metode eksplisit akan menghasilkan nilai yang bias jika $\Delta\tau$ dan ΔS mendekati nol. Dengan kata lain dapat dikatakan metode implisit akan menghasilkan nilai yang konvergen ke suatu nilai, sedangkan metode eksplisit tidak stabil untuk $\Delta\tau$ dan ΔS mendekati nol. Khususnya, harga opsi Eropa yang dihasilkan dengan metode implisit akan konvergen ke nilai analitiknya.

6. Daftar Pustaka

[1] Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing Of Options And Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.

[2] Murwaningtyas, C. E. & Guritno, S. (2003). Metode Martingale Dalam Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa Dengan Menggunakan Pendekatan Waktu Kontinu Pada Pasar (B,S). *Teknosains*, 16(1), 19-32.

[3] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Volume II. New York: Springer Science & Business Media.

[4] Hull, J. C. (2021). *Options, Futures, and Other Derivatives, Global Edition.* Britania Raya: Pearson.

[5] Buchanan, J. R. (2012). *An Undergraduate Introduction To Financial Mathematics*. Singapura: World Scientific Publishing Company.

[6] Murwaningtyas, C. E., Haryatmi. S., Gunardi, & Suryawan, H. P. (2020). Finite Difference Method For Pricing Of Indonesian Option Under A Mixed Fractional Brownian Motion. *Mathematics and Statistics*, 8(5), 610–619.