

## PELABELAN TOTAL SUPER *EDGE TRIMAGIC* PADA GRAF PENDULUM *k-CYCLE*

Septa Dewi Wulandari<sup>1)</sup>, Titin Sri Martini<sup>2)</sup>

<sup>1),2)</sup>Universitas Sebelas Maret, Jalan Ir. Sutami 36 Kentingan, Jebres, Surakarta

Email: septadewi39@student.uns.ac.id<sup>1)</sup>, titinsmartini@staff.uns.ac.id<sup>2)</sup>

**Abstrak.** Suatu Graf  $G$  dengan  $|V(G)| = p$  dan  $|E(G)| = q$  adalah pelabelan total *edge trimagic* jika suatu pemetaan bijektif  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ , sedemikian sehingga untuk setiap *edge*  $uv \in E(G)$  berlaku  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah tiga konstanta yang berbeda  $k_1, k_2,$  dan  $k_3$ . Pelabelan total *edge trimagic* dikatakan pelabelan total super *edge trimagic* graf  $G$  jika *vertex* dilabeli dengan bilangan bulat positif sekecil mungkin yaitu  $1, 2, 3, \dots, p$ . Pada penelitian ini, ditentukan pelabelan total super *edge trimagic* dari graf pendulum *k-cycle*.

**Kata Kunci :** Pelabelan Total Edge Trimagic, Graf Pendulum *k-Cycle*

### 1. Pendahuluan

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler dalam penyelesaian masalah jembatan Königsberg. Salah satu topik yang ada di dalam teori graf adalah pelabelan graf. Menurut Wallis (Wallis, 2001), pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non negatif. Pelabelan yang domainnya berupa himpunan *vertex* disebut pelabelan *vertex*, pelabelan yang domainnya himpunan *edge* disebut pelabelan *edge*, dan pelabelan yang domainnya himpunan *vertex* dan himpunan *edge* disebut pelabelan total. Suatu pelabelan total disebut pelabelan super jika setiap *vertex*-nya mempunyai label lebih kecil daripada *edgenya*.

Seiring berjalannya waktu penelitian tentang pelabelan juga berkembang. Pelabelan *magic* pertama dikenalkan oleh Sedláček (Sedláček, 1963). Pada tahun 1970 Kotzig dan Rosa (Kotzig, 1970) mendefinisikan *edge magic* suatu graf  $G$  adalah suatu pemetaan bijektif  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ , sedemikian sehingga untuk setiap *edge*  $uv \in E(G)$ , berlaku  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah konstan. Kemudian pada tahun 2004, pelabelan *edge bimagic* diperkenalkan oleh Babujee (Babujee, 2004) dengan definisi yaitu sebuah graf  $G$  adalah suatu pemetaan bijektif  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ , sedemikian sehingga untuk setiap *edge*  $uv \in E(G)$ , berlaku  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah dua konstanta yang berbeda yaitu  $k_1$  dan  $k_2$ .

Pelabelan total *edge trimagic* pertama kali dikenalkan oleh Jayasekaran *et al*, pada 2013 (Jayasekaran, 2013). Graf  $G$  dengan  $|V(G)| = p$  dan  $|E(G)| = q$  adalah suatu pemetaan bijektif  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ , sedemikian sehingga untuk setiap *edge*  $uv \in E(G)$ , berlaku  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah tiga konstanta yang berbeda  $k_1, k_2,$  dan  $k_3$ . Pelabelan total *edge trimagic* disebut sebuah pelabelan total super *edge trimagic* dari sebuah graf  $G$  jika *vertex* diberi label himpunan bilangan  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ . Pada pelabelan total super *edge trimagic*, terdapat beberapa graf yang teliti diantaranya pada tahun 2013 Jayasekaran dan Regees (Jayasekaran, 2013) meneliti graf  $P_n \odot K_2$ ,  $P_n \odot \bar{K}_2$ ,  $C_n \odot \bar{K}_2$ , graf *square*  $P_n^2$ ,  $(P_n; S_1)$ , dan graf *triangular snake*  $TS_n$ . Di tahun

2017 Jayasekaran dan Flower (Jayasekaran, 2017) meneliti graf *mobius ladder*, graf *book*, dan graf *dragon*. Pada tahun 2018 Jayasekaran *et al.* (Jayasekaran, 2018) meneliti graf *closed helm*, graf *antiprism*, dan graf *square  $C_n^2$* . Pada tahun 2020 Annisa (Annisa, 2020) meneliti graf *butterfly*. Di tahun yang sama Pratiwi (Pratiwi, 2020) meneliti bahwa graf *pan* dan graf siklus dengan korona *vertex* lintasan memuat pelabelan total *super edge trimagic*. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai pelabelan total *super edge trimagic* pada graf pendulum *k-cycle*.

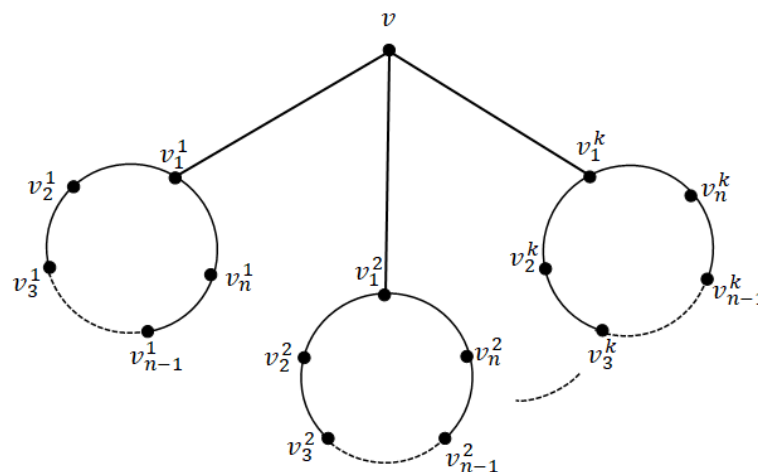
## 2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mempelajari berbagai referensi dari buku, jurnal maupun tulisan mengenai teori graf khususnya pelabelan *trimagic*. Langkah-langkah menentukan pelabelan total *super edge trimagic* pada graf pendulum *k-cycle*.

- (1) Mempelajari dan memahami hasil penelitian terkait pelabelan total *super edge trimagic*.
- (2) Menentukan label *vertex* dengan label  $1, 2, 3, \dots, |V(G)|$ , kemudian label *edge* dengan label  $|V(G)| + 1, |V(G)| + 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|$ .
- (3) Mengkombinasikan label *vertex* dan *edge*, dengan memperhatikan teknik pelabelan total *super edge trimagic*.
- (4) Menentukan pola umum pelabelan total *super edge trimagic*.
- (5) Menentukan nilai  $k_1, k_2$ , dan  $k_3$  yang diperoleh dari pola umum pelabelan total *super edge trimagic*.
- (6) Menyusun teorema beserta pembuktian berdasarkan pola umum yang diperoleh.
- (7) Membuat kesimpulan.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Graf pendulum *k-cycle* ( $k - C_n$ ) merupakan suatu graf yang terdiri dari  $k$  graf *cycle  $C_n$*  dan menghubungkan salah satu titik dari *cycle* dengan *edge* ke suatu titik pusat  $v$ . Gambar 1 merupakan graf pendulum *k-cycle* dengan  $k$  *edge* dan  $n$  *cycle*.



**Gambar 1.** Graf Pendulum *k-cycle*

**Teorema 3.1.** *Graf pendulum k-cycle ( $k - C_n$ ) merupakan graf dengan pelabelan total super edge trimagic dengan nilai  $k = n$  untuk  $k$  genap,  $n \geq 4$ .*

Didefinisikan himpunan *vertex*  $V(G) = \{v\} \cup \{v_j^i | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n-1\}$  dan himpunan *edge*  $E(G) = \{vv_1^i | 1 \leq i \leq k\} \cup \{v_j^i v_{j+1}^i | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v_1^i v_k^i | 1 \leq i \leq k\}$ . Didefinisikan pemetaan bijektif dari graf  $G$  adalah  $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$

- Kasus 1 untuk  $k = n = 4$ , sehingga,

$$\begin{aligned} f(v) &= 1 \\ f(v_j^i) &= (j-1)k + i + 1, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \\ f(vv_1^i) &= k^2 + k + 2 - i, \quad 1 \leq i \leq k \\ f(v_j^i v_{j+1}^i) &= \begin{cases} 2k^2 + k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = 1 \\ k^2 + 3k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = 2 \\ k^2 + 3k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k/2 + 1 \end{cases} \\ f(v_1^i v_k^i) &= 2k^2 + k + 3 - 2i, \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf pendulum  $k$ -cycle untuk  $k = 4$ , merupakan pelabelan total super *edge trimagic*.

$$\begin{aligned} &\text{Untuk edge } vv_1^i, \quad 1 \leq i \leq k \\ f(v) + f(vv_1^i) + f(v_1^i) &= 1 + k^2 + k + 2 - i + (j-1)k + i + 1 \\ &= k^2 + k + 4 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

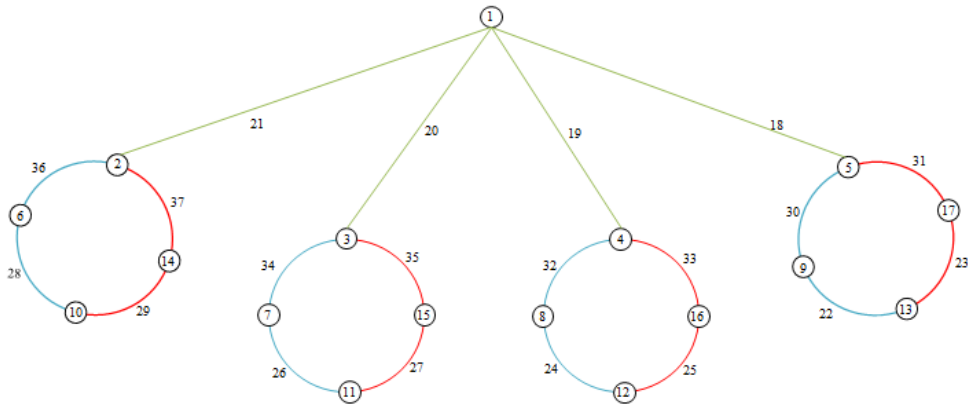
$$\begin{aligned} &\text{Untuk edge } v_1^i v_2^i, \quad 1 \leq i \leq k \\ f(v_1^i) + f(v_1^i v_2^i) + f(v_2^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 2k^2 + 2k + 4 \\ &= k_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Untuk edge } v_2^i v_3^i, \quad 1 \leq i \leq k \\ f(v_2^i) + f(v_2^i v_3^i) + f(v_3^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 3k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= k^2 + 6k + 4 \\ &= k_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Untuk edge } v_3^i v_4^i, \quad 1 \leq i \leq k \\ f(v_3^i) + f(v_3^i v_4^i) + f(v_4^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 3k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= k^2 + 8k + 5 \\ &= k_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Untuk edge } v_1^i v_k^i, \quad 1 \leq i \leq k \\ f(v_1^i) + f(v_1^i v_k^i) + f(v_k^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 2k^2 + 4k + 5 \\ &= k_3 \end{aligned}$$

Contoh pelabelan total super *edge trimagic* pada graf pendulum  $4 - C_4$



**Gambar 2.** Graf Pendulum  $4 - C_4$  dengan  $k_1 = 24$ ,  $k_2 = 44$ , dan  $k_3 = 53$

- Kasus 1 untuk  $k = n = 6$ , sehingga

$$\begin{aligned}
 f(v) &= 1 \\
 f(v_j^i) &= (j-1)k + i + 1, & 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \\
 f(vv_1^i) &= k^2 + k + 2 - i, & 1 \leq i \leq k \\
 f(v_j^i v_{j+1}^i) &= \begin{cases} 2k^2 + k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = 1 \\ k^2 + 5k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = 2 \\ k^2 + 3k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k/2 \\ k^2 + 5k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k/2 + 1 \\ k^2 + 3k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k - 1 \end{cases} \\
 f(v_1^i v_k^i) &= 2k^2 + k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k
 \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf pendulum  $k$ -cycle untuk  $k = 6$ , merupakan pelabelan total super *edge trimagic*.

Untuk edge  $vv_1^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v) + f(vv_1^i) + f(v_1^i) &= 1 + k^2 + k + 2 - i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= k^2 + k + 4 \\
 &= k_1
 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_1^i v_2^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v_1^i) + f(v_1^i v_2^i) + f(v_2^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= 2k^2 + 2k + 4 \\
 &= k_2
 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_2^i v_3^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v_2^i) + f(v_2^i v_3^i) + f(v_3^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 5k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= k^2 + 8k + 4 \\
 &= k_2
 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_3^i v_4^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v_3^i) + f(v_3^i v_4^i) + f(v_4^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 3k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= k^2 + 8k + 4 \\
 &= k_2
 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_4^i v_5^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v_4^i) + f(v_4^i v_5^i) + f(v_5^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 5k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= k^2 + 12k + 5 \\
 &= k_3
 \end{aligned}$$

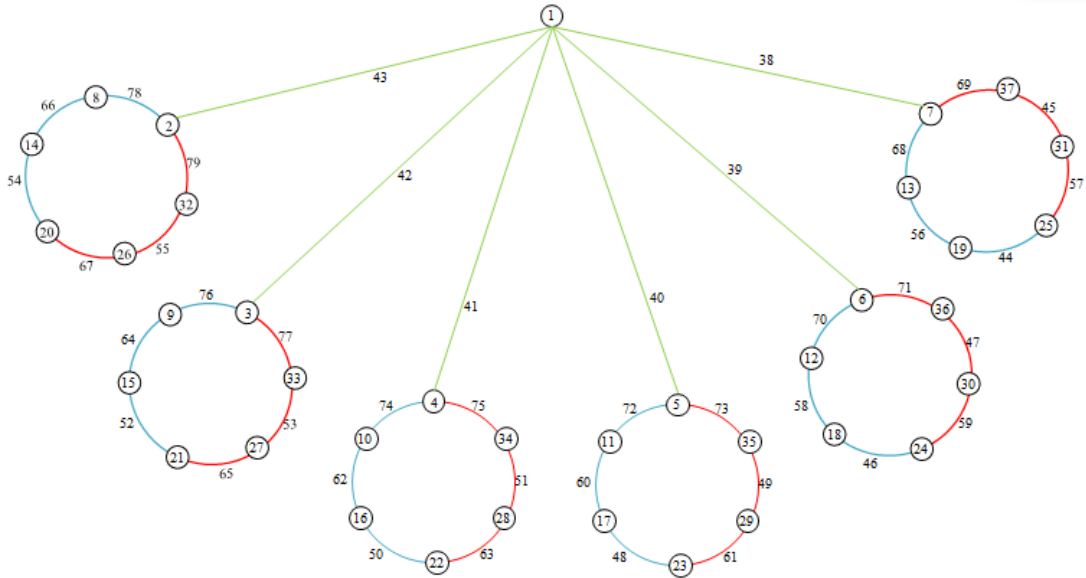
Untuk edge  $v_5^i v_6^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v_5^i) + f(v_5^i v_6^i) + f(v_6^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 3k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= k^2 + 12k + 5 \\
 &= k_3
 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_1^i v_k^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 f(v_1^i) + f(v_1^i v_k^i) + f(v_k^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\
 &= 2k^2 + 6k + 5 \\
 &= k_3
 \end{aligned}$$

Contoh pelabelan total super *edge trimagic* pada graf pendulum  $6 - C_6$



**Gambar 3.** Graf Pendulum  $6 - C_6$  dengan  $k_1 = 46$ ,  $k_2 = 88$ , dan  $k_3 = 113$

- Kasus 1 untuk  $k = n \geq 8$ , sehingga

$$\begin{aligned}
 f(v) &= 1 \\
 f(v_j^i) &= (j-1)k + i + 1, & 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \\
 f(v_1^i) &= k^2 + k + 2 - i, & 1 \leq i \leq k \\
 f(v_j^i v_{j+1}^i) &= \begin{cases} 2k^2 + k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = 1 \\ 2k^2 + 3k - 2kj + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k/2 - 1 \\ k^2 + 3k + 2 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k/2 \\ k^2 + 5k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k - 2 \\ k^2 + 3k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k, j = k - 1 \\ 3k^2 + k - 2kj + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k, k/2 + 1 \leq j \leq k - 3 \end{cases} \\
 f(v_1^i v_k^i) &= 2k^2 + k + 3 - 2i, & 1 \leq i \leq k
 \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan graf pendulum  $k$ -cycle untuk  $k \geq 8$ , merupakan pelabelan total super *edge trimagic*.

Untuk edge  $vv_1^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} f(v) + f(vv_1^i) + f(v_1^i) &= 1 + k^2 + k + 2 - i + (j-1)k + i + 1 \\ &= k^2 + k + 4 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_1^i v_2^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} f(v_1^i) + f(v_1^i v_2^i) + f(v_2^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= k^2 + k + 4 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_{k/2-1}^i v_{k/2}^i$ ,  $1 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k/2 - 1$

$$\begin{aligned} f(v_{k/2-1}^i) + f(v_{k/2-1}^i v_{k/2}^i) + f(v_{k/2}^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + 3k - 2kj + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 2k^2 + 2k + 4 \\ &= k_2 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_{k/2}^i v_{k/2+1}^i$ ,  $1 \leq i \leq k, j = k/2$

$$\begin{aligned} f(v_{k/2}^i) + f(v_{k/2}^i v_{k/2+1}^i) + f(v_{k/2+1}^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 3k + 2 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= k^2 + k + 4 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_{k-2}^i v_{k-1}^i$ ,  $1 \leq i \leq k, j = k - 2$

$$\begin{aligned} f(v_{k-2}^i) + f(v_{k-2}^i v_{k-1}^i) + f(v_{k-1}^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 5k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 2k^2 + 2k + 4 \\ &= k_2 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_{k-1}^i v_k^i$ ,  $1 \leq i \leq k, j = k - 1$

$$\begin{aligned} f(v_{k-1}^i) + f(v_{k-1}^i v_k^i) + f(v_k^i) &= (j-1)k + i + 1 + k^2 + 3k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 3k^2 + 5 \\ &= k_3 \end{aligned}$$

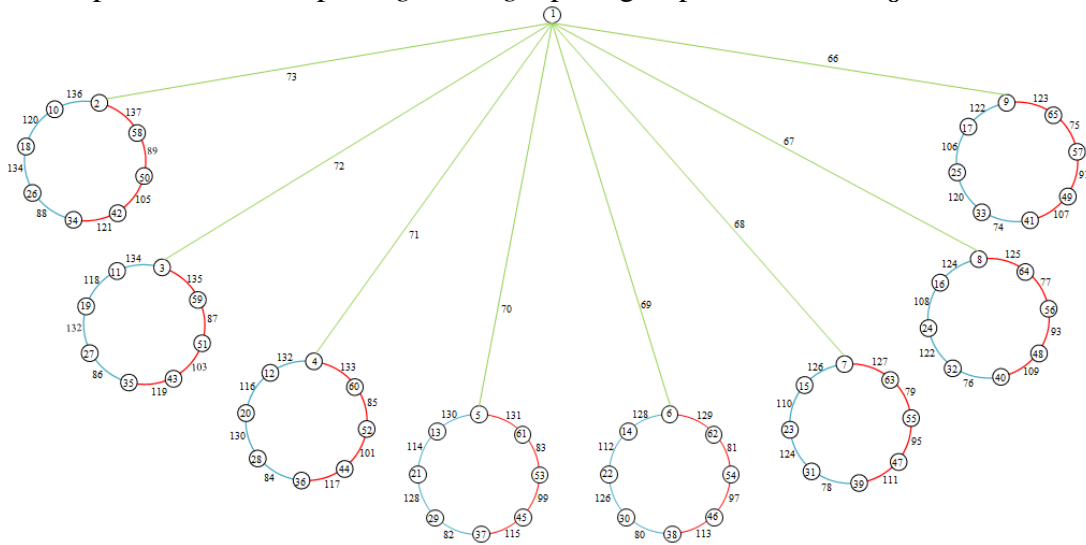
Untuk edge  $v_{k-3}^i v_{k-2}^i$ ,  $1 \leq i \leq k, k/2 + 1 \leq j \leq k - 3$

$$\begin{aligned} f(v_{k-3}^i) + f(v_{k-3}^i v_{k-2}^i) + f(v_{k-2}^i) &= (j-1)k + i + 1 + 3k^2 + k - 2kj + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 3k^2 + 5 \\ &= k_3 \end{aligned}$$

Untuk edge  $v_1^i v_k^i$ ,  $1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} f(v_1^i) + f(v_1^i v_k^i) + f(v_k^i) &= (j-1)k + i + 1 + 2k^2 + k + 3 - 2i + (j-1)k + i + 1 \\ &= 3k^2 + 5 \\ &= k_3 \end{aligned}$$

Contoh pelabelan total super *edge trimagic* pada graf pendulum  $8 - C_8$



**Gambar 4.** Graf Pendulum  $8 - C_8$  dengan  $k_1 = 76$ ,  $k_2 = 148$ , dan  $k_3 = 197$

#### 4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dibuktikan bahwa graf pendulum  $k$ -cycle dengan nilai  $k = n$ , nilai  $k \geq 4$ , dan  $k$  adalah genap memuat pelabelan total super *edge trimagic*.

#### 5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih diucapkan kepada Titin Sri Martini, S.Si., M.Kom, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam dan Matematika, Universitas Sebelas Maret atas dukungan yang diberikan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan artikel penelitian ini dengan baik.

#### 6 Daftar Pustaka

- [1] Babujee, J. (2004). On Edge Bimagic Labeling. *Journal of Combinations Information and System Sciences*, 249-244.
- [2] Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.
- [3] Kotzig, A. dan A. Rosa. (2013). *Magic Valuation of Finite Graphs*, Canad: Math Bull, 451-461.
- [4] Ristiawan, Rifki. (2019). Graf Pendulum dengan Pelabelan *Graceful Super Fibonacci*. *Faktor Exacta 12.1*, 51-57.
- [5] Jayasekaran, C., M. Regees, dan C. Davidraj. (2013). Edge Trimagic Labeling of Some Graphs, *International Journal of Combinatorial Graph Theory and Applications*, 175-186.
- [6] Sedláček, J. Problem 27. (1963). *Theory of Graphs and Its Applications*, Praha: Proc. Symp. Smolenice.
- [7] Jayasekaran, C., S. Robinson, dan J. Flower. (2018). Edge Trimagic Labeling of Cycle Related Graphs, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 511-519.
- [8] Jayasekaran, C. dan J. Flower. (2017). Edge Trimagic Labeling of Mobius Ladder, Book and Dragon Graphs, *Annal of Pure and Applied Mathematics*, 151-163.
- [9] Jayasekaran, C. dan M. Regees. (2013). Edge Trimagic Labeling of Graphs, *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 295-320.

- [10] Annisa, F.N. (2020). Pelabelan Total Sisi Trimagic Super pada Graf Butterfly. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya*, pp:315-319.
- [11] Pratiwi, A.T. (2020). Pelabelan Total Super Edge Trimagic pada Graf Pan dan Graf Siklus dengan Korona Vertex Lintasan. *Prosiding Seminar Nasional STKIP PGRI Sumatera Barat Vol.3 No.1*, p2-11.