BEBERAPA RUMUS TRIGONOMETRI MENGGUNAKAN PENDEKATAN GEOMETRI

Ahmad Khairul Umam[1], Ahmad Isro'il [2]
[1], [2] Universitas Billfath, Sekaran, Lamongan.

Email: ahmad.khairul.umam@gmail.com[1], ahmad.isroil@gmail.com[2]

Abstrak. Pada artikel ini dibahas bagaimana cara mendapatkan beberapa rumus trigonometri menggunakan beberapa bidang datar seperti segitiga dan persegi panjang. Penelitian ini adalah studi pustaka. Pada pembahasan diperoleh beberapa rumus trigonometri dengan pendekatan geometri dan tanpa menggunakan identitas trigonometri Pythagoras (identitas Pythagoras). Untuk mendapatkan beberapa rumus trigonometri biasanya menggunakan identitas Pythagoras, namun pada penelitian ini dapat memperoleh rumus-rumus trigonometri tanpa menggunakan identitas Pythagoras.

Kata Kunci: *Trigonometri, Identitas Trigonometri Pythagoras, Geometri*

1. Pendahuluan

Topik trigonometri sangat penting di bidang kajian matematika. Fungsi trigonometri dapat digambarkan sebagai fungsi periodik yang mulus (*smooth*). Beberapa penerapan fungsi trigonometri seperti pada persamaan gelombang, transformasi geometri, transformasi Fourier, dan lain-lain. Trigonometri terdiri dari Sinus (Sin), Cosinus (Cos), dan Tangen (Tan). *Domain* (daerah asal) dari fungsi trigonometri adalah berupa sudut, sedangkan untuk *range* (daerah hasil) fungsi tersebut adalah bilangan real.

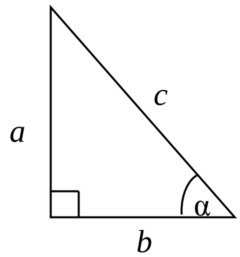
Tentu kaitannya dengan trigonometri memiliki banyak rumus. Beberapa penurunan rumus trigonometri biasanya didapatkan dari identitas Pythagoras (Palmer & Leigh, 1934; Robbins, 2016). Identitas Pythagoras berkaitan dengan teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga siku-siku. Sedangkan Loney (1893) dan Taylor (1946) telah membuktikan beberapa rumus trigonometri dengan menggunakan pendekatan geometri. Pada artikel ini dijelaskan juga proses mendapatkan beberapa rumus trigonometri menggunakan pendekatan geometri yang lain seperti segitiga dan persegi panjang. Proses mendapatkan beberapa rumus trigonometri yang dibahas tanpa menggunakan identitas Pythagoras.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Penelitian ini dilakukan di Lamongan, Gresik, dan Surabaya. Penelitian ini dilakukan selama satu tahun dari bulan Januari sampai bulan Desember tahun 2023. Tahapan-tahapan penelitian ini yaitu seperti: pencarian materi penelitian terdahulu yang relevan, pencarian pustaka-pustaka yang berkaitan, menjelaskan penurunan rumus-rumus pada pembahasan, terakhir menyimpulkan hal-hal penting dari hasil pembahasan.

3. Hasil dan Pembahasan

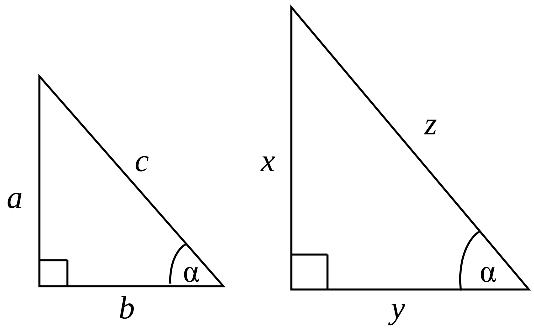
Identitas Pythagoras ada kaitannya dengan teorema Pythagoras. Menurut Blitzer (2018) maksud teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga siku-siku memiliki aturan yang berlaku yaitu $a^2 + b^2 = c^2$.



Gambar 1. Segitiga Siku-Siku

Menurut Palmer & Leigh (1934), Robbins (2016), Taylor (1946), dan Hobson (1918) serta berdasarkan Gambar 1 diberikan rumus Sin$\alpha = a/c$, kemudian diperoleh rumus-rumus Cos$\alpha = b/c$ dan Tan$\alpha = a/b$ menggunakan identitas Pythagoras.

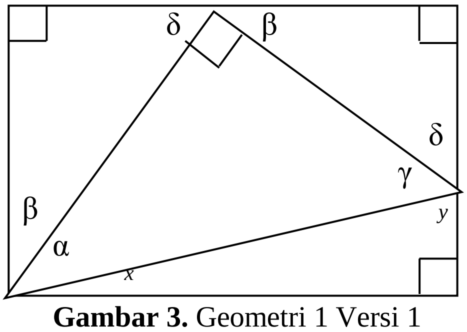
Berdasarkan kesebangunan dua segitiga, untuk segitiga-segitiga berikut ini berlaku $a/c = x/z$.



Gambar 2. Dua Segitiga Siku-Siku

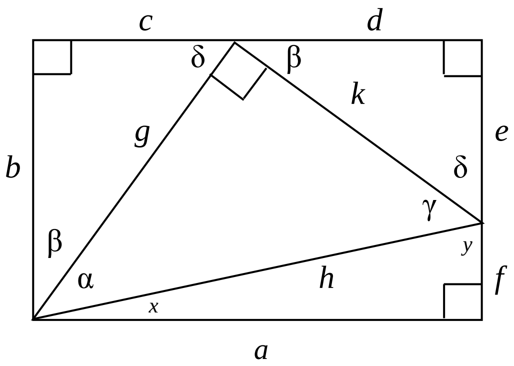
Dari kesebangunan tersebut dijadikan $a/c = x/z = S(\alpha)$ dimana $S(\alpha)$ adalah nilai fungsi S di α. Kemudian dengan cara yang sama juga didapatkan $b/c = y/z = C(\alpha)$ dimana $C(\alpha)$ adalah nilai fungsi C di α. Selanjutnya dilakukan pembagian $S(\alpha)$ dengan $C(\alpha)$ menjadi $T(\alpha) = S(\alpha)/C(\alpha) = (a/c)/(b/c) = (a/c)\times(c/b) = a/b$ atau $T(\alpha) = S(\alpha)/C(\alpha) = (x/z)/(y/z) = (x/z)\times(z/y) = x/y$.

Diberikan geometri seperti berikut ini.



Gambar 3. Geometri 1 Versi 1

Maka didapatkan nilainya sebagai berikut: $\alpha+\gamma=90°$, $\beta+\delta=90°$, $x=90°-(\alpha+\beta)$, $y=\alpha+\beta$. Versi lain Gambar 3 ketika diberikan nilai panjang pada setiap sisinya menjadi:



Gambar 4. Geometri 1 Versi 2

Dimana $a=c+d$ dan $b=e+f$. Dari Gambar 4 dan hasil penjelasan sebelumnya diperoleh

$S(\alpha+\beta)=a/h=(c+d)/h=(c/h)+(d/h)=(c/g)(g/h)+(d/k)(k/h)=S(\beta)C(\alpha)+C(\beta)S(\alpha)$

$C(\alpha+\beta)=f/h=(b-e)/h=(b/h)-(e/h)=(b/g)(g/h)-(e/k)(k/h)=C(\beta)C(\alpha)-S(\beta)S(\alpha)$

$T(\alpha+\beta)=a/f=(c+d)/f=((c+d)/(b-e))((1/b)/(1/b))=(((c+d)/b)/((b-e)/b))$

$=((c/b)+(d/b))/(1-e/b)=((c/b)+(k/g))/(1-(e/d)(d/b))$

$=((c/b)+(k/g))/(1-(e/d)(k/g))=(T(\beta)+T(\alpha))/(1-T(\beta)T(\alpha))$.

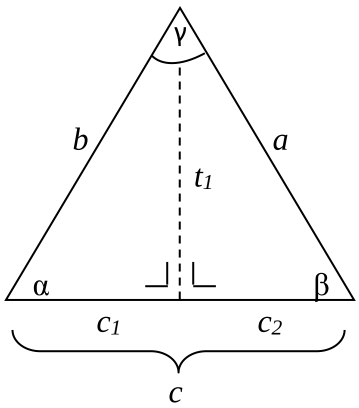
Jika $\alpha=\beta$ maka diperoleh

$S(2\alpha)=S(\alpha)C(\alpha)+C(\alpha)S(\alpha)=2S(\alpha)C(\alpha)$

$C(2\alpha)=C(\alpha)C(\alpha)-S(\alpha)S(\alpha)=C^2(\alpha)-S^2(\alpha)$

$T(2\alpha)=(T(\alpha)+T(\alpha))/(1-T(\alpha)T(\alpha))=(2T(\alpha))/(1-T^2(\alpha))$.

Selanjutnya diberikan geometri lagi seperti ini

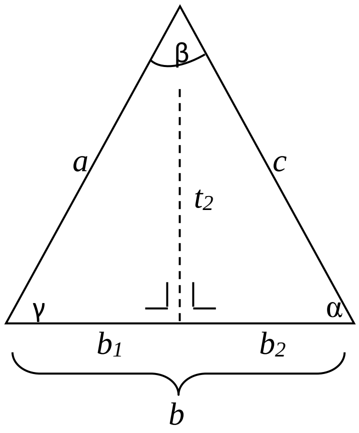


Gambar 5. Geometri 2 Versi 1

diketahui $S(\alpha)=t_1/b$ dan $S(\beta)=t_1/a$ atau dapat ditulis sebagai $t_1=bS(\alpha)$ dan $t_1=aS(\beta)$. Kemudian dapat diperoleh

$$t_1=t_1$$
$$bS(\alpha)=aS(\beta)$$
$$(S(\alpha))/a=(S(\beta))/b$$

dan selanjutnya dimisalkan $(S(\alpha))/a=(S(\beta))/b=k$. Versi lain dari Gambar 5 ketika diputar (dirotasi) menjadi berikut ini:



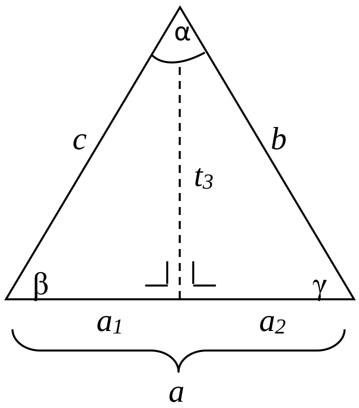
Gambar 6. Geometri 2 Versi 2

Diketahui $S(\gamma)=t_2/a$ dan $S(\alpha)=t_2/c$ atau dapat ditulis sebagai $t_2=aS(\gamma)$ dan $t_2=cS(\alpha)$. Kemudian dapat diperoleh:

$$t_2= t_2$$
$$aS(\gamma)= cS(\alpha)$$
$$(S(\gamma))/c= (S(\alpha))/a.$$

Karena $(S(\alpha))/a=k$ maka $(S(\gamma))/c=k$. Sehingga diperoleh $(S(\alpha))/a= (S(\beta))/b=(S(\gamma))/c$.

Selanjutnya pada Gambar 5, karena $C(\alpha)= (c_1)/b$ dan $C(\beta)= (c_2)/a$ atau dapat ditulis sebagai $c_1=bC(\alpha)$ dan $c_2=aC(\beta)$ maka $c= c_1+ c_2= bC(\alpha)+ aC(\beta)$. Kemudian dari Gambar 6, $C(\gamma)= (b_1)/a$ dan $C(\alpha)= (b_2)/c$ atau dapat ditulis sebagai $b_1=aC(\gamma)$ dan $b_2=cC(\alpha)$ maka $b= b_1+ b_2= aC(\gamma)+ cC(\alpha)$. Versi lain lagi dari Gambar 5 dan 6 ketika dirotasi menjadi:



Gambar 7. Geometri 2 Versi 3.

Karena $C(\beta)= (a_1)/c$ dan $C(\gamma)= (a_2)/b$ atau dapat ditulis sebagai $a_1=cC(\beta)$ dan $a_2=bC(\gamma)$ maka $a= a_1+ a_2= cC(\beta)+ bC(\gamma)$.

Dari tiga persamaan

$$c= bC(\alpha)+ aC(\beta)$$
$$b= aC(\gamma)+ cC(\alpha)$$
$$a= cC(\beta)+ bC(\gamma)$$

masing-masing berturut-turut dikalikan dengan c, b, dan a untuk semua ruas yaitu ruas kiri dan kanan. Setelah dikalikan, tiga persamaan tersebut menjadi:

$$c^2= bcC(\alpha)+ acC(\beta)$$
$$b^2= abC(\gamma)+ bcC(\alpha)$$
$$a^2= acC(\beta)+ abC(\gamma).$$

Lalu dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan untuk

$$c^2 + b^2 - a^2 = bcC(\alpha) + acC(\beta) + abC(\gamma) + bcC(\alpha) - (acC(\beta) + abC(\gamma))$$
$$c^2 + b^2 - a^2 = bcC(\alpha) + acC(\beta) + abC(\gamma) + bcC(\alpha) - acC(\beta) - abC(\gamma)$$
$$c^2 + b^2 - a^2 = 2bcC(\alpha)$$
$$c^2 + b^2 - 2bcC(\alpha) = a^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcC(\alpha).$$

Kemudian dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan untuk

$$c^2 + a^2 - b^2 = bcC(\alpha) + acC(\beta) + acC(\beta) + abC(\gamma) - (abC(\gamma) + bcC(\alpha))$$
$$c^2 + a^2 - b^2 = bcC(\alpha) + acC(\beta) + acC(\beta) + abC(\gamma) - abC(\gamma) - bcC(\alpha))$$
$$c^2 + a^2 - b^2 = 2acC(\beta)$$
$$c^2 + a^2 - 2acC(\beta) = b^2$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acC(\beta).$$

Selanjutnya dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan untuk

$$b^2 + a^2 - c^2 = abC(\gamma) + bcC(\alpha) + acC(\beta) + abC(\gamma) - (bcC(\alpha) + acC(\beta))$$
$$b^2 + a^2 - c^2 = abC(\gamma) + bcC(\alpha) + acC(\beta) + abC(\gamma) - bcC(\alpha) - acC(\beta))$$
$$b^2 + a^2 - c^2 = 2abC(\gamma)$$
$$b^2 + a^2 - 2abC(\gamma) = c^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abC(\gamma).$$

Akhirnya fungsi-fungsi $S(\alpha)$, $C(\alpha)$, dan $T(\alpha)$ berturut-turut dapat diganti dengan trigonometri Sinα, Cosα, dan Tanα, hal tersebut juga berlaku terhadap rumus-rumus yang sudah diperoleh.

4. Kesimpulan

Beberapa rumus trigonometri yang didapatkan untuk segitiga siku-siku pada Gambar 1 adalah:

a. Sinα = depan/miring = *a/c*
b. Cosα = samping/miring = *b/c*
c. Tanα = depan/samping = *a/b.*

Jika diberikan dua sudut yaitu α dan β maka diperoleh rumus-rumus sebagai berikut:

a. Sin(α+β) = Sinα Cosβ + Sinβ Cosα
b. Cos(α + β) = Cosα Cosβ - Sinα Sinβ
c. Tan(α + β) = (Tanα + Tanβ)/(1- Tanα Tanβ)
d. Sin(2α) = 2 Sinα Cosα
e. Cos(2α) = $\text{Cos}^2\alpha - \text{Sin}^2\alpha$
f. Tan(2α) = (2Tanα)/ (1-$\text{Tan}^2\alpha$).

Selanjutnya rumus-rumus yang berlaku pada Gambar 5 adalah:

a. (Sinα)/a = (Sinβ)/b = (Sinγ)/c
b. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ Cosα
c. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac$ Cos*β*
d. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ Cosγ.

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah mendapatkan rumus-rumus trigonometri lainnya dengan menggunakan pendekatan geometri tanpa menggunakan identitas Pythagoras.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Eridani dari Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga atas diskusi dan masukannya selama penulisan artikel ini.

6. Daftar Pustaka

Blitzer, R. (2018). *Trigonometry, 2nd Edition.* Hoboken: Pearson.

Hobson, E. W. (1918). *A Treatise on Plane Trigonometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

Loney, S. L. (1893). *Plane Trigonometry*. Cambridge: Cambridge University Press.

Palmer, C. I. & Leigh, C. W. (1934). *Plane and Spherical Trigonometry*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Robbins, E. R. (2016). *Plane Trigonometry*. New York: American Book Company.

Taylor, J. M. (1946). *Plane and Spherical Trigonometry*. New York: Barnes & Noble, Inc.